MATHEMATIQUES I

Notations. — Soit N un entier positif, on note $\mathbf{R}^N$ l'ensemble des vecteurs colonnes (ou points) $\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x^N \end{pmatrix}$

$x^i \in \mathbf{R}$ (corps des réels).

$\mathbf{R}_+^N$ est l'ensemble des vecteurs colonnes avec $x^i \geqslant 0$ $(i = 1, 2, ..., N)$

Définitions. — Une *combinaison linéaire convexe* de q vecteurs de $\mathbf{R}^N$ $X_1, X_2, ..., X_q$ est le vecteur $\sum_1^q \alpha_i X_i$

où $\alpha_i \in \mathbf{R}$. $\alpha_i \geqslant 0$ $\sum_1^q \alpha_i = 1$.

Une partie E de $\mathbf{R}^N$ est *convexe* si et seulement si E est stable par combinaison convexe (toute combinaison convexe de vecteurs de E est dans E).

Soit E une partie convexe de $\mathbf{R}^N$, X est un *point extrémal* de E si et seulement si :

X appartient à E et il n'existe aucun couple de points (Y, Z) différents de X et appartenant à E tels que $X = \frac{Y+Z}{2}$ (il est équivalent de dire que X appartient à E et n'est pas combinaison convexe de points de E).

A titre d'exemple donner les points extrémaux d'un segment $[a\ b]$ de $\mathbf{R}$, d'un disque fermé de centre O de rayon 1 dans $\mathbf{R}^2$, d'un cube fermé de $\mathbf{R}^3$.

Les parties I, II *sont indépendantes, la partie* III *utilise les résultats des parties* I *et* II.

I. PRÉLIMINAIRE

n est un entier positif, on définit la matrice à $(2n - 1)$ lignes et n^2 colonnes :

$$A_{2n-1,\,n^2} = \begin{array}{c} \\ n \\ \\ \\ \\ \\ \\ n-1 \\ \\ \end{array} \overbrace{\begin{array}{cccccccccccccccc} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{array}}^{n} = (a_{ij})_{\substack{i = 1, 2, ..., 2n-1 \\ j = 1, 2, ..., n^2}}$$

i indice des lignes.
j indice des colonnes.

$$1 \leqslant i \leqslant n \begin{cases} a_{ij} = 1 & \text{si} \quad (i-1)\,n + 1 \leqslant j \leqslant in \\ a_{ij} = 0 & \text{pour les autres valeurs de } j \end{cases}$$

$$n + 1 \leqslant i \leqslant n + (n-1) \quad \text{si} \quad i = n + k \begin{cases} a_{ij} = 1 & \text{pour } j = k,\ k + n,\ k + 2n,\ ...,\ k + (n-1)\,n, \\ a_{ij} = 0 & \text{pour les autres valeurs de } j. \end{cases}$$

. . . / . . .

1° Calculer le rang de la matrice $A_{3,4}$ ($n = 2$) et la valeur des déterminants d'ordre 3 extraits de cette matrice.

2° Montrer que le rang de la matrice $A_{2n-1,\, n^2}$ est $2n - 1$ et que les déterminants d'ordre $2n - 1$ extraits de la matrice $A_{2n-1,\, n^2}$ ont pour valeur 0, + 1, − 1. (Remarquer que toute matrice carrée B extraite de $A_{2n-1,\, n^2}$ s'écrit $\begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ où P et Q sont des matrices ayant la propriété suivante : chaque colonne de P (resp Q) contient au plus une fois le coefficient 1 et des 0 ailleurs et raisonner par récurrence.)

II

m et p sont deux entiers positifs ($p \geqslant 0$). Soit A une matrice à m lignes et $m + p$ colonnes de *rang* m et b un vecteur non nul de $\mathbf{R}^m$. On note $A_1, A_2, \ldots, A_{m+p}$ les vecteurs colonnes de la matrice A et on désigne par $\mathcal{F}^+_{(A,\, b)}$ les vecteurs X de R^{m+p} à composantes *positives ou nulles* solutions du système linéaire $AX = b$.

$$\mathcal{F}^+_{(A,\, b)} = \left\{ X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x^{m+p} \end{pmatrix} \; x^i \geqslant 0 \;\middle|\; x^1 A_1 + x^2 A_2 + \ldots x^{m+p} A_{m+p} = b \right\}$$

1° Montrer que $\mathcal{F}^+_{(A,\, b)}$ est une partie convexe de $\mathbf{R}^{m+p}$.

2° Pour toute suite strictement croissante de m entiers $i_1 < i_2 \ldots < i_m$ appartenant à $\{1, 2, \ldots, m + p\}$ telle que les vecteurs colonnes $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_m}$ de la matrice A soient linéairement indépendants, on note $B_{i_1 \ldots i_m}$ la matrice carrée d'ordre m de ces m vecteurs et on considère :

$$\mathcal{F}^+_{(B_{i_1 \ldots i_m},\, b)} = \left\{ y = \begin{pmatrix} y^{i_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y^{i_m} \end{pmatrix} \; \underset{k=1,\ldots,m}{y^{i_k} \geqslant 0} \;\middle|\; y^{i_1} A_{i_1} + \ldots + y^{i_m} A_{i_m} = b \right\}$$

Pour tout élément $y \in \mathcal{F}^+_{(B_{i_1 \ldots i_m},\, b)}$ on définit $X \in \mathbf{R}^{m+p}_+$

$$X = \begin{pmatrix} x^1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x^{m+p} \end{pmatrix} \quad \text{en posant} \quad \begin{aligned} x^i &= 0 \quad \text{si} \quad i \neq i_k \; (k = 1, \ldots, m) \\ x^{i_k} &= y^{i_k} \qquad k = (1, 2, \ldots m) \end{aligned}$$

Montrer que X est un point extrémal de $\mathcal{F}^+_{(A,\, b)}$ (raisonner par l'absurde).

3° Inversement soit X un point extrémal de $\mathcal{F}^+_{(A,\, b)}$ et soit $(x^{i_1}, x^{i_2}, \ldots, x^{i_q})$ les composantes non nulles de X ($i_1 < i_2 < \ldots < i_q$)

a. Montrer que les vecteurs colonnes $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_q}$ extraits de la matrice A sont linéairement indépendants (raisonner par l'absurde).

b. Déduire de *a.* qu'il existe une matrice carrée $m \times m$ de rang m, $B_{i_1, \ldots, i_m}$ extraite de A telle que $y \in \mathcal{F}^+_{(B_{i_1, \ldots, i_m},\, b)}$

$$\text{où } y = \begin{pmatrix} y^{i_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y^{i_m} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} y^{i_k} &= x^{i_k} \qquad k = 1, 2, \ldots, q \\ y^{i_k} &= 0 \qquad k = q + 1, \ldots, m. \end{aligned}$$

. . . / . . .

4° On suppose de plus, dans cette question que les vecteurs colonnes de A appartiennent à $\mathbf{R}^m_+$ et qu'aucun de ces vecteurs n'est nul.

Soit X un point *non extrémal* de $\mathcal{F}^+_{(A,\,b)}$ tel que $X = \dfrac{Y+Z}{2}$ avec Y et Z $\in \mathcal{F}^+_{(A,\,b)}$ différents de X, on désigne par k le nombre de *composantes nulles* de X et on pose $U = X - Y$

Montrer que l'on peut choisir deux nombres α et β *positifs* tels que les points $X_1 = X + \beta U$, $X_2 = X - \alpha U$ appartiennent à $\mathcal{F}^+_{(A,\,b)}$ et possèdent au moins $(k+1)$ composantes nulles.

En déduire que tout élément de $\mathcal{F}^+_{(A,\,b)}$ est combinaison convexe d'éléments extrémaux.

III

Soit n un entier fixé. Les matrices carrées d'ordre n à coefficients réels $x = (x_{i,j})$ $\begin{matrix} i = 1, 2, \ldots, n \\ j = 1, 2, \ldots, n \end{matrix}$ (i indice des lignes, j indice des colonnes) sont identifiées aux vecteurs de $\mathbf{R}^{n^2}$,

$$X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x^{n^2} \end{pmatrix} \quad \left(\text{en posant } x^k = x_{ij} \quad \text{avec} \quad k = n(i-1) + j \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \ldots, n \\ j = 1, 2, \ldots, n \end{matrix}\right).$$

On désigne par $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n vérifiant les conditions :

$$x_{ij} \geqslant 0 \text{ pour } i = 1, 2, \ldots, n,\ j = 1, 2, \ldots, n,$$

$$\forall\, i \text{ fixé} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1,$$

$$\forall\, j \text{ fixé} \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1.$$

Soit $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des matrices de permutations d'ordre n c'est-à-dire les matrices obtenues en permutant les colonnes de la matrice identité I_n.

On se propose de montrer que toute matrice de $\mathcal{S}_n$ est combinaison convexe de matrices appartenant à $\mathcal{P}_n$.

1° Vérifier l'inclusion : $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{S}_n$ et montrer qu'une matrice de $\mathcal{S}_n$ est à coefficients entiers si et seulement si elle appartient à $\mathcal{P}_n$.

2° Montrer qu'il existe une matrice A à $(2n-1)$ lignes et n^2 colonnes et un vecteur b non nul de $\mathbf{R}^{2n-1}$ tel que : $x \in \mathcal{S}_n$ si et seulement si $X \in \mathcal{F}^+_{(A,\,b)}$. En déduire que $\mathcal{S}_n$ est convexe.

3° Montrer que toute matrice de permutation est point extrémal de $\mathcal{S}_n$.

4° Inversement montrer que tout point extrémal de $\mathcal{S}_n$ est une matrice de permutation. (Utiliser II, 3° *b.*, i, 2°, III, 1°.)

5° Montrer que toute matrice x de $\mathcal{S}_n$ est combinaison convexe de matrices de permutations. (Raisonner par récurrence sur le nombre de coefficients nuls de x et utiliser II, 4°.)

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail